

QED 1-7

Matematikk for
grunnskolelærerutdanningen

Bind 2

Fasit kapittel 3 – Funksjonslære

Kapittel 3

Oppgave 1. a) en funksjon b) ikke en funksjon c) en funksjon d) ikke en funksjon e) ikke en funksjon

Oppgave 2. a) 12,1 b) $\frac{3}{4}$ c) $-3 + \pi$ d) $2 - \sqrt{2}$ e) $3\sqrt{3} - 1$

Oppgave 3. a) $(-5, 7]$ b) $(-\infty, 100)$ c) $(-\infty, \infty)$ d) $(-2, 2)$

Oppgave 4. a) $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $x \in [-12, 12]$ c) $x \in (-1, 1)$ d) $x \in (0, 2)$ e) $x \in (-1, 3)$

Oppgave 5. a) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ b) $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$ c) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ d) $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$ e) $(-\infty, -3] \cup (3, 4)$

Oppgave 6. a) $D_f = [0, \infty)$ b) $D_g = \mathbb{R}$ c) $D_h = [0, \infty)$ d) $D_k = \mathbb{R}$ e) $D_m = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (skrivemåte for «alle reelle tall unntatt -1 ») f) $D_n = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ (alle reelle tall unntatt -3 og 1)

Oppgave 7. a) $f(g(x)) = \sqrt{x+1}$ b) $f(g(x)) = \frac{1}{x^4}$ c) $f(g(x)) = 3x^2 + 2x + 1$

Oppgave 8. a) $f(g(x)) = 3x^2 + 24x + 49$ b) $g(f(x)) = 3x^2 + 5$ c) $g(f(g(x))) = 3x^2 + 24x + 53$

Oppgave 9. a) ∞ b) 0 c) ∞ d) ∞

Oppgave 11. a) $r^2 + 2rs + s^2$ b) $a^2 - 4ab + 4b^2$ c) $x^2 - y^2$ d) $4a^2 - 9b^2$

Oppgave 12. a) løsninger: $x = -3$ og $x = 3$, faktorisering: $(x+3)(x-3)$ b) løsninger: $x = -4$ og $x = 2$, faktorisering: $(x+4)(x-2)$ c) løsning: $x = 2$, faktorisering: $2(x-2)^2$ d) ingen løsning (blant de reelle tallene), faktorisering: $2(x^2 - 2x + 2)$

Oppgave 13. positiv løsning: $x = 6$, negativ løsning: $x = -12$

Oppgave 16. a) $x = 0$ og $x = 3$ b) $x = -4$ c) $x = -1$ og $x = \frac{1}{2}$

Oppgave 17. a) kontinuerlig b) ikke kontinuerlig

Oppgave 18. $a = 2$, $b = 0$

Oppgave 19. a) 2 b) 3 c) 0

Oppgave 20. (bruk skjæringssetningen; i a er $f(-2) = -4$ og $f(1) = 2$ og f er kontinuerlig, i b er $g(-1) = -1$ og $g(1) = \frac{1}{3}$ og g er kontinuerlig)

Oppgave 21. *hint:* vis setningen ved å se på $f(x) - c$

Oppgave 22. a) uttrykket er positivt for $x \leq -\frac{1}{3}$ og $x \geq 0$ og negativt for $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$ b) uttrykket er ikke definert for $x = -\frac{1}{3}$ (et kryss her), positivt

for $x < -\frac{1}{3}$ og $x \geq 0$ og negativt for $-\frac{1}{3} < x \leq 0$ **c)** uttrykket er ikke definert for $x = 2$ (et kryss her), positivt for $x < 2$ (0 for $x = 1$) og negativt for $x > 2$

Oppgave 23. a) $(-\infty, -2)$ og $[1, \infty)$ **b)** $[3, \infty)$

Oppgave 24. a) mulighet I: to løsninger når $b^2 - 4ac > 0$, mulighet II: én løsning når $b^2 - 4ac = 0$ og mulighet III: ingen løsninger når $b^2 - 4c < 0$ **b)**

eksempler: I: $x^2 - 3x + 2 = 0$, II: $x^2 - 2x + 1 = 0$, III: $x^2 + 1 = 0$ **c)** (eksempler fra b:)

I: $f(x)$ er positivt for $x \leq 1$ og $x \geq 2$ (grafene ligger over x -aksen - med nullpunkter $x = 1$ og $x = 2$) og negativt for $1 < x < 2$ (grafene ligger under x -aksen for $1 < x < 2$), II: $f(x)$ er positivt for alle x (grafene ligger over x -aksen, og skjærer x -aksen i $x = 1$), III: $f(x)$ er positivt for alle x (grafene ligger over x -aksen)

d) I: $a(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$, II: $a(x + \frac{b}{2a})^2$, III: $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

Oppgave 25. a) $x - 1$ **b)** $x^2 - 2x + 1$ **c)** $2x^2 - x - 1$

Oppgave 26. a) $2(x + 6)(x - 1)(x + \frac{1}{2})$ **b)** $[-6, -\frac{1}{2}]$ og $[1, \infty)$

Oppgave 28. a) -5 **b)** 5 **c)** 7 **d)** -18

Oppgave 29. a) 3 **b)** 6 **c)** 5

Oppgave 30. b) 4 **c)** 3 **d)** $\frac{5}{2}$ **e)** $\frac{21}{10}$ **f)** kan se ut som den nærmer seg 2

Oppgave 32. a) $f'(x) = 2x - 4$ **b)** $f'(x) = 6x + 1$ **c)** $f'(x) = 3x^2$

Oppgave 33. a) $f'(x) = 4x$ **b)** $f'(x) = 12x^3 - 4$ **c)** $f'(x) = 30x^4 - 12x^3 + 4x + 2$ **d)** $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ **e)** $f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

Oppgave 34. a)b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ **c)d)** $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Oppgave 35. a) $g'(x) = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **b)** $m'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$ **c)** $s'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x + 1}}$

Oppgave 36. $\frac{111}{4}$

Oppgave 37. (f.eks. for derivasjon av en sum, skriv $(f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x) = f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)$)

Oppgave 39. a) $f''(x) = 0$ **b)** $g''(x) = 2a$ **c)** $h''(x) = 6ax + 2b$

Oppgave 40. a) konveks hvis $a > 0$, konkav hvis $a < 0$ **b)** hvis $a > 0$: f avtar på intervallet $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ og vokser på intervallet $[-\frac{b}{2a}, \infty)$; hvis $a < 0$: f vokser på intervallet $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ og avtar på intervallet $[-\frac{b}{2a}, \infty)$ **c)**

makspunkt hvis $a < 0$, minpunkt hvis $a > 0$

Oppgave 41. a) nullpunkt: $x = 0$, makspunkt: $x = 2$, minpunkt: $x = -2$, vendepunkt: $x = 0$, vokser: $[-2, 2]$, konkav: $[-2, 0]$, konveks: $[0, 2]$ **b)**

nullpunkt: ingen, maks punkt: $x = 0$, vendepunkter: $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ og $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, vokser: $(-\infty, 0]$, avtar: $[0, \infty)$, konveks: $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}]$ og $[\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty)$, konkav: $[-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}]$ **c**) nullpunkter: $x = -15$, $x = 9$ og $x = 0$, maks punkt: $x = -9$, min punkt: $x = 5$, vendepunkt: $x = -2$, vokser: $(-\infty, -9]$ og $[5, \infty)$, avtar: $[-9, 5]$, konkav: $(-\infty, -2]$, konveks: $[-2, \infty)$ **d**) nullpunkter: $x = -3$, $x = -1$ og $x = 4$, maks punkt: $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$, min punkt: $x = \sqrt{\frac{13}{3}}$, vendepunkt: $x = 0$, vokser: $(-\infty, -\sqrt{\frac{13}{3}}]$ og $[\sqrt{\frac{13}{3}}, \infty)$, avtar: $[-\sqrt{\frac{13}{3}}, \sqrt{\frac{13}{3}}]$, konkav: $(-\infty, 0]$, konveks: $[0, \infty)$

Oppgave 42. **a**) maks punkt: $x = 1$ **b**) avtar: $(-\infty, 1]$ og $(1, \infty)$ **c**) f er ikke kontinuerlig for $x = 1$

Oppgave 44. **a**) vertikal asymptote: $x = 0$, horisontal asymptote: $y = 0$, avtar: $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$, konkav: $(-\infty, 0)$, konveks: $(0, \infty)$ **b**) vertikal asymptote: $x = 0$, horisontal asymptote: $y = 0$, vokser: $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$, konveks: $(-\infty, 0)$, konkav: $(0, \infty)$ **c**) vertikal asymptote: $x = -2$, horisontal asymptote: $y = 0$, vokser: $(-\infty, -2)$ og $(-2, \infty)$, konveks: $(-\infty, -2)$, konkav: $(-2, \infty)$ **d**) vertikale asymptoter: $x = -2$ og $x = 0$, horisontal asymptote: $y = 0$, vokser: $(-\infty, -2)$ og $(-2, -1]$, avtar: $[-1, 0)$ og $(0, \infty)$, lokalt maks punkt: $x = -1$, konveks: $(-\infty, -2)$ og $(0, \infty)$, konkav: $(-2, 0)$

Oppgave 45. 5625

Oppgave 46. $(\frac{O}{4})^2$ der O er den gitte omkretsen

Oppgave 47. **a**) 200 **b**) $\frac{a^2}{2}$

Oppgave 48. to lengder er 15 m og tre lengder er 10 m

Oppgave 49. **a**) 40 kr; 32 000 kr

Oppgave 50. $s = 6$ cm, $h = 3$ cm; 108 cm²